Ανάπτυξη προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων

Μ. Γ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
Δρ. Πολιτικός Μηχανικός
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Σ. ΚΟΖΑΝΗΣ
Αγρονόμος & Τοπογράφος Μηχ.
Υπ. Διδάκτορας Ε.Μ.Π.

Περίληψη
Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η ανάπτυξη ενός προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων σε ηλεκτρονικό υπολογιστή το οποίο ονομάστηκε XFem. Παρουσιάζεται αρχικά το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο, όπως θεωρία ελαστικότητας – θεωρία πλαστικότητας και θεωρία πεπερασμένων στοιχείων. Ακολουθεί η παρουσίαση της ανάπτυξης του προγράμματος. Το πρόγραμμα αναπτύχθηκε βάσει των προδιαγραφών: Στοιχεία 3 διαστάσεων και απαραίτητη γραφική απεικόνιση, δυνατότητα χρήσης νόμων μη γραμμικής συμπεριφοράς. Ακολουθούν οι δυνατότητες και οι ιδιαιτερότητες του προγράμματος και τέλος παρατίθενται μερικά παραδείγματα προβλημάτων που έχουν επιλυθεί με αυτό το πρόγραμμα.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το 1996 στα πλαίσια διπλωματικής εργασίας [1], αναπτύχθηκε πρόγραμμα πεπερασμένων στοιχείων. Ο Τίτλος της Διπλωματικής Εργασίας ήταν : "Ανάπτυξη προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων με εφαρμογές σε τρισδιάστατα προγράμματα μη γραμμικής συμπεριφοράς". Το δε πρόγραμμα, ονομάστηκε **XFem**. Όπως φανερώνει ο τίτλος, το πρόγραμμα το οποίο αναπτύχθηκε μπορούσε να επιλύσει προβλήματα μηχανικής παραμορφωσίμων σωμάτων σε τρεις διαστάσεις. Το πρόγραμμα γράφτηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C/C++ και αναπτύχθηκε σε περιβάλλον UNIX.

Η ανάπτυξη του προγράμματος έγινε εξ'αρχής χωρίς να χρησιμοποιηθεί έτοιμος κώδικας από παλαιότερα προγράμματα. Οι περισσότεροι έτοιμοι κώδικες για πεπερασμένα στοιχεία είναι σε γλώσσα Fortran σε δομημένο ή μη δομημένο προγραμματισμό. Τα σύγχρονα προγράμματα είναι γραμμένα σε αντικειμενοστραφή προγραμματισμό (Object Oriented Programming), σε γλώσσες όπως η C++, γλώσσες που πλεονεκτούν πάρα πολύ έναντι των παλαιοτέρων γλωσσών δομημένου προγραμματισμού ως προς τα θέματα απλοποίησης του προγράμματος και μείωσης του όγκου του. Ορισμένα μέρη του προγράμματος είναι σε δομημένο προγραμματισμό (C) και ορισμένα σε αντικειμενοστραφή με την χρήση class (C++).

Το πρόγραμμα εκτός της δυνατότητας επίλυσης των προβλημάτων, ολοκληρώνει τις δυνατότητες προετοιμασίας των δεδομένων και παρουσίασης των αποτελεσμάτων. Για τον σκοπό αυτό το πρόγραμμα χρησιμοποιεί γραφική επικοινωνία με τον χρήστη με παράθυρα, κουμπιά κλπ. Έτσι είναι εύκολη η αλληλεπίδραση του χρήστη με τα αποτελέσματα και την προετοιμασία του προβλήματος.

Έπειτα το πρόγραμμα συνέχισε να αναπτύσσεται και να βελτιώνεται στα πλαίσια διδακτορικής διατριβής που εκπονείται πάνω σε θέματα υπολογιστικής μηχανικής. Αυτή τη στιγμή το πρόγραμμα έχει βελτιωθεί πάρα πολύ και είναι σε θέση να αντιμετωπίσει πολλά πρακτικά προβλήματα της μηχανικής των παραμορφωσίμων, όπως γεωτεχνικές εφαρμογές, αλλά και προβλήματα ερευνητικού επιπέδου, όπως προσομοίωση πειραμάτων κ.α.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

x,y,z	Συντεταγμένες τρισορθογωνίου συστήματος
ξ,η,ζ	Φυσικές συντεταγμένες
u,v,w	Μετατοπίσεις κατά τους άξονες x,y,z
u	Διάνυσμα μετατοπίσεων όλων των βαθμών ελευθ.
ε	Ανηγμένες παραμορφώσεις
σ,γ	Τάσεις ορθές, διατμητικές
G_i	Δύναμη ανά μονάδ. επιφ. στο σύνορο
v	Κλίση στο σύνορο
P_i	Φορτία
δ_i	Δυνατές μετατοπίσεις
dV	Διαφορικό ολοκλήρωσης στον όγκο
F	διάνυσμα δυνάμεων
[**D**]	Μητρώο ιδιοτήτων υλικών
E	Μέτρο Ελαστικότητας
ν	Λόγος Poison
[**B**]	Μητρώο παραγώγων συναρτήσεων μορφής
[**J**]	Ιακωβιανή
[**K**]	Μητρώο δυσκαμψίας
[**K**e]	Μητρώο δυσκαμψίας ενός στοιχείου
H_i	Συντελεστές αριθμ. ολοκλήρωσης Gauss
Δ	Τελεστής που δηλώνει διαφορά
f	Διάνυσμα ελλειμματικού φορτίου
R	Διάνυσμα ελλειμμάτων ισορροπίας
Tview	Πίνακας μετασχηματισμού συστ. απεικόνισης
c	Σταθερά μεγεύθυνσης
x_v,y_v,z_v	Συντεταγμένες στην οθόνη του υπολογιστή
x_w,y_w,z_w	Καθολικές συντεταγμένες
[**D**ep]	Ελαστοπλασικό μητρώο [**D**]
[**D**p]	Διαφορά [**D**], [**D**ep]
J'_2	Δεύτερη αναλλοίωτη του αποκλίνοντα τανυστή τάσεων
I_1	Πρώτη αναλλοίωτη του τανυστή τάσεων
θ	Γωνία του Lode
φ,c	Γωνία τριβής, συνοχή

α,k' Παράμετροι κριτηρίου αστοχίας Drucker-Prager
m,s Παράμετροι κριτηρίου αστοχίας Hoek-Brown
σ_C,σ_T Αντοχή σε θλίψη, εφελκυσμό

2. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ, ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ

2.1. Ιστορικά

Τα πεπερασμένα στοιχεία είναι μια από τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιεί η υπολογιστική μηχανική για να προσομοιώσει τα φυσικά προβλήματα. Ως μέθοδος είναι αρκετά παλιά, αναπτύχθηκε στην δεκαετία του 50[1]-[2]. Στα χρόνια που ακολούθησαν μέχρι και σήμερα η μέθοδος εξελίχθηκε πάρα πολύ παράλληλα με την εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η μέθοδος από την φύση της είναι πολύ δαπανηρή σε πόρους ηλεκτρονικού υπολογιστή. Όταν πρωτοπαρουσιάστηκε, οι υπολογιστές της εποχής εκείνης (υπερυπολογιστές μάλιστα) είχαν πολύ μικρές δυνατότητες (μνήμες της τάξης των 16-32 Kb, μικρές τιμές MFLOP-αριθμού πράξεων πραγματικών αριθμών ανά δευτερόλεπτο). Οι σημερινοί (προσωπικοί) υπολογιστές που τρέχουν προγράμματα Π.Σ. έχουν πολλαπλάσιες δυνατότητες από τους υπολογιστές εκείνης της εποχής (μνήμες της τάξης των 128 Mb, 200 MFLOP και πλέον).

Η εξέλιξη αυτή στους υπολογιστές δεν άλλαξε μόνο το μέγεθος των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν, αλλά και τις μεθοδολογίες που ακολουθούνται και το εύρος και την πολυπλοκότητα των προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν. Για παράδειγμα, ένας υπολογιστής της δεκαετίας του 70 μπορούσε να λύσει προβλήματα της τάξης των 90-120 κόμβων με 30-40 στοιχεία. Ένας σύγχρονος υπολογιστής μπορεί να λύσει εύκολα προβλήματα της τάξης των 50-60x10^3 κόμβων με 8-10x10^3 στοιχεία. Όμως, όπως αναφέραμε υπάρχουν πιο ριζικές αλλαγές:

Ενώ παλιότερα τα προβλήματα λύνονταν στις 2 διαστάσεις κάνοντας απλοποιητικές παραδοχές, τώρα μπορούμε να επιλύσουμε κατευθείαν τα προβλήματα όπως είναι στην φύση (στις 3 διαστάσεις). Ακόμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πιο πολύπλοκα μοντέλα για την περιγραφή των υλικών: Ενώ αρχικά η μέθοδος επίλυε προβλήματα θεωρώντας τα υλικά με γραμμική συμπεριφορά (ελαστική), τώρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολύ πιο σύνθετα μοντέλα όπως πλαστικότητα, ρεολογία, κ.α. Όλα αυτά είναι δυνατόν να εφαρμοστούν επειδή έχουμε πια την απαραίτητη υπολογιστική ισχύ. Ενώ η γνώση για να επιλυθούν αυτά τα προβλήματα υπήρχε και παλαιότερα, ήταν αδύνατη η εφαρμογή της.

[1] Argyris, J.H. and Kelsey, S. (1960) "Energy Theorems and Structural Analysis", Plenum Press

[2] Clough R.W. (1960), "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", Proc. 2nd Conf. Electronic Computation, ASCE, Pittsburg, Pa., Sept. 8-9, 1960

2.2. Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι μια μέθοδος της αριθμητικής ανάλυσης η οποία αποτελεί φυσική προσέγγιση του προβλήματος με την διαμέριση του φυσικού χώρου σε επιμέρους διακριτά πεπερασμένα στοιχεία, στα οποία ορίζονται οι εξισώσεις που έχουν ακριβή λύση. Επειδή δε τα προβλήματα της μηχανικής των παραμορφωσίμων (όπως και όλα τα φυσικά προβλήματα του συνεχούς μέσου) περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, μπορούμε να τα επιλύσουμε με την βοήθεια των πεπερασμένων στοιχείων. Οι διαφορικές εξισώσεις για τα προβλήματα της μηχανικής [10] [12] των παραμορφωσίμων προκύπτουν από διάφορες άλλες εξισώσεις όπως οι σχέσεις μετατοπίσεων - ανηγμένων παραμορφώσεων (2.1),(2.2), οι εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων (2.3) καθώς και από τις εξισώσεις ισορροπίας στο χώρο (2.4). Όπως κάθε πρόβλημα που εκφράζεται με διαφορικές εξισώσεις έτσι και εδώ υπάρχουν και συνοριακές συνθήκες, όπως φυσικές συνοριακές συνθήκες (φορτίσεις κλπ) και βασικές συνοριακές συνθήκες ή συνθήκες Dirichlet (2.5) και Neumann (2.6) (δεσμεύσεις, στηρίξεις κλπ). Παραθέτουμε ορισμένες βασικές διαφορικές σχέσεις:

Σύνδεση ανηγμένων παραμορφώσεων – μετατοπίσεων:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.1}$$

και

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{2.2}$$

Εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_j}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial i \partial j} \tag{2.3}$$

όπου τα i, j είναι x,y ή y,z ή z,x

Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} + F_i = 0 \tag{2.4}$$

όπου i = x,y,z.. Οι F_i είναι οι μαζικές δυνάμεις.

Συνοριακές συνθήκες:

$$\sigma_{ij} v_j = G_i \tag{2.5}$$

όπου **v** είναι η κλίση στο σύνορο και G_i η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας στο σύνορο. Ακόμα:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_I \tag{2.6}$$

που σημαίνει ότι το διάνυσμα μετατοπίσεων είναι ορισμένο σε περιοχές του σώματος.

Για να επιτύχουμε την αριθμητική λύση του προβλήματος χρησιμοποιούμε την αρχή των δυνατών έργων [3] [7]. Αν σ_{ij} και ε_{ij} είναι αντίστοιχα οι τανυστές των τάσεων και των αν. παραμορφώσεων ενώ P_i και δ_i είναι τα φορτία και οι δυνατές μετακινήσεις, πρέπει το έργο που προκαλείται από τα φορτία να ισούται με το δυνατό έργο των παραμορφώσεων δηλαδή:

$$\sum P_i \delta_i = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \tag{2.7}$$

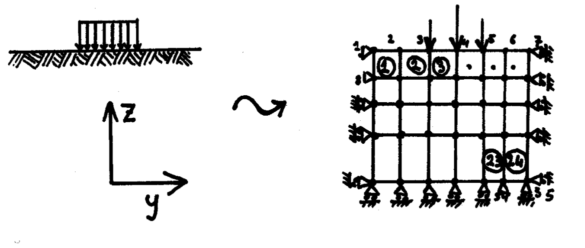
Για να καταστρωθεί το πρόβλημα των πεπερασμένων στοιχείων, πρέπει το πεδίο του προβλήματος, το οποίο καταλαμβάνει συνήθως κάποιο πεπερασμένο όγκο στον χώρο, να χωριστεί σε πεπερασμένο αριθμό στοιχείων απλούστερου σχήματος. Κάθε πεπερασμένο στοιχείο αποτελείται από κάποιον αριθμό κόμβων (όπως 8 κόμβοι για ένα απλό κυβικό στοιχείο) όπου κάθε κόμβος έχει κάποιους βαθμούς ελευθερίας (3 μετακινήσεις x,y,z για προβλήματα της μηχανικής των παρμορφωσίμων). Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στο να δοθούν τιμές σε αυτούς τους βαθμούς ελευθερίας. Τα διάφορα στοιχεία συναρμολογούνται σε κάποιους κοινούς βαθμούς ελευθερίας (ή κόμβους). Έτσι σε ένα κόμβο μπορούν να συνδέονται 2,3 ή και περισσότερα στοιχεία. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως [3] [5] [7]:

$$[\boldsymbol{K}].\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F} \tag{2.8}$$

Όπου u διάνυσμα διάστασης n ίσης με τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος, όπου κάποιες από αυτές είναι δεσμευμένες (u_i=δέσμευση) και αποτελούν τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Το F είναι διάνυσμα διάστασης n και περιέχει τις συνοριακές συνθήκες των φορτίσεων δηλαδή οι δυνάμεις στους κόμβους, οι πιέσεις πάνω στις πλευρές των στοιχείων καθώς και οι μαζικές δυνάμεις (όπως το ίδιο βάρος). Ο πίνακας [**K**] έχει διαστάσεις nxn και ονομάζεται πίνακας δυσκαμψίας. Στον πίνακα αυτόν περιέχεται η γεωμετρία του προβλήματος καθώς και οι φυσικές ιδιότητες των υλικών. Ονομάζεται δε πίνακας δυσκαμψίας διότι δείχνει την δυσκαμψία του συστήματος να αντιδράσει σε κάποια επιβολή εξωτερικής φόρτισης ή αλλιώς δείχνει την απόκριση του συστήματος στα εξωτερικά αίτια.

Για να γίνει η επίλυση του προβλήματος επιλύεται το σύστημα εξισώσεων [**K**].**u**=**F** και έτσι παίρνουμε τις τιμές για τα **u**. Έπειτα με κατάλληλες αναγωγές μπορούμε από τα **u** να βγάλουμε και άλλα παράγωγα μεγέθη όπως οι τάσεις.

Στο Σχήμα 1 φαίνεται σχηματοποιημένα η κατάστρωση ενός προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία. Μπορούμε να δούμε το πεδίο του προβλήματος, την κατάτμηση σε πεπερασμένα στοιχεία που συναρμολογούνται σε κόμβους, τις συνοριακές συνθήκες (φορτίσεις/δεσμεύσεις) καθώς και ένα απομονωμένο στοιχείο με τους τοπικούς και καθολικούς βαθμούς ελευθερίας.

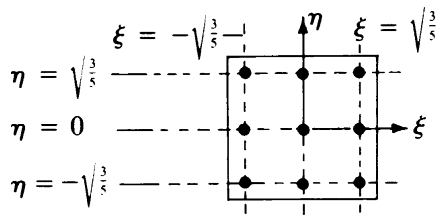


Σχήμα 1. Διαμέριση ενός φυσικού προβλήματος σε πεπερασμένα στοιχεία και διακριτές στηρίξεις/φορτία

2.2.1. Σχηματισμός του πίνακα δυσκαμψίας

Για να σχηματιστεί ο πίνακας [**K**] γίνεται μια συναρμολόγηση πολλών επιμέρους πινάκων [$\mathbf{K_i}$] κάθε στοιχείου. Για να σχηματιστούν οι επιμέρους πίνακες [**K**] χρησιμοποιείται αριθμητική ολοκλήρωση με την μέθοδο των σημείων Gauss. Για να είναι εύκολοι οι υπολογισμοί για την κατάστρωση των εξισώσεων χρησιμοποιούμε πολυώνυμα (πολυώνυμα μορφής - shape functions), τα οποία είναι εύκολα ολοκληρώσιμα/ παραγωγήσιμα. Ανάλογα με τον βαθμό των πολυωνύμων, λαμβάνουμε και ανάλογη τάξη στα στοιχεία. Έτσι χρησιμοποιώντας απλά πολυώνυμα πρώτου βαθμού, στα στερεά προκύπτουν κυβικά στοιχεία 8 κόμβων. Αν χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε το πεδίο του στοιχείου πολυώνυμα β' βαθμού, τότε προκύπτουν στοιχεία ανώτερης τάξης όπως κυβικά στοιχεία 20 κόμβων. Όσο μεγαλύτερης τάξης είναι τα στοιχεία, τόσο καλύτερη ακρίβεια έχουμε στην επίλυση, ακρίβεια που μπορούμε να αυξήσουμε και με την καλύτερη πύκνωση του προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία.

Τα πολυώνυμα μορφής είναι εκφρασμένα σε ένα τοπικό σύστημα αξόνων *(ξ,η,ζ)* το οποίο έχει κέντρο στο εσωτερικό του στοιχείου. Οι τιμές των συντεταγμένων στο τοπικό σύστημα κυμαίνονται μεταξύ -1 και 1. Αυτά τα πολυώνυμα μορφής παραγωγίζονται εύκολα ως προς *ξ,η,ζ* σχηματίζοντας τα μητρώα [$\mathbf{B_i}$] με τις παραγώγους τους.



Σχήμα 2. Σημεία ολοκλήρωσης Gauss σε ένα επίπεδο στοιχείο

Στο Σχήμα 2 βλέπουμε τα σημεία ολοκλήρωσης Gauss για ένα δισδιάστατο στοιχείο [5]. Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων έχουμε 3 τέτοια διατεταγμένα επίπεδα.

Την ακρίβεια ολοκλήρωσης με την μέθοδο Gauss μπορούμε να την αυξήσουμε αυξάνοντας τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης. Για προβλήματα τριών διαστάσεων ένας ικανοποιητικός αριθμός σημείων είναι 27 διατάσσοντας τα σημεία σε 3 στήλες, 3 γραμμές σε 3 επίπεδα ώστε τα σημεία να ισαπέχουν στις 3 κάθετες διευθύνσεις κατά √3/5.

Ο τελικός τύπος για τον σχηματισμό του μητρώου δυσκαμψίας ενός στοιχείου [**K**e] είναι:

$$K_e = \int_V [B]^T [D][B] dV \tag{2.9}$$

Με τη βοήθεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης ο τύπος γράφεται με τη μορφή αθροίσματος διακριτών όρων:

$$K_e = \sum_{i=1}^{n} H_i [B(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)]^T [D][B(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)] \left| J(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) \right| \tag{2.10}$$

Οι H_i είναι οι συντελεστές της ολοκλήρωσης Gauss σε n διακριτά σημεία με συντεταγμένες (ξ_i,η_i,ζ_i), ενώ η J είναι η Ιακωβιανή μετασχηματισμού από το καθολικό σύστημα συντεταγμένων X,Y,Z στο ξ,η,ζ. Το **[D]** είναι ένα μητρώο που υπολογίζεται από τις ελαστικές σταθερές Ε,ν.

2.2.2. Επίλυση του συστήματος

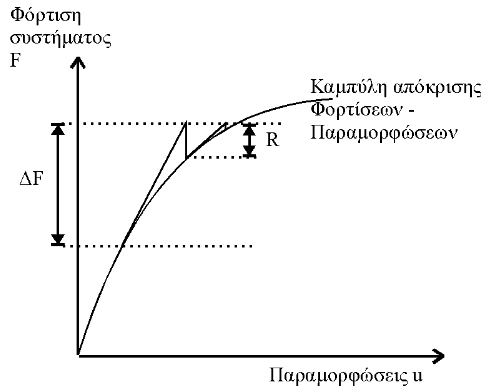
Μετά την επίλυση του συστήματος εξισώσεων [**K**].**u**=**F** προκύπτουν οι τιμές των u, που στην περίπτωση της ανάλυσης μας είναι μετατοπίσεις στους βαθμούς ελευθερίας (μετατοπίσεις x,y,z στους κόμβους). Χρήσιμα μεγέθη μετά την επίλυση δεν είναι μόνο οι μετατοπίσεις αλλά και οι τάσεις και διάφορα άλλα παράγωγα μεγέθη. Για τον σκοπό αυτό μπορούμε με αριθμητικές παραγωγίσεις του πεδίου των μετατοπίσεων, να υπολογίσουμε τις ανηγμένες παραμορφώσεις καθώς και τις τάσεις στο πεδίο του προβλήματος. Ενώ η κατανομή του πεδίου των μετατοπίσεων είναι συνεχής, τα παράγωγα μεγέθη μπορεί να μην έχουν συνέχεια, ανάλογα με την τάξη των στοιχείων. Αν τα πολυώνυμα που περιγράφουν τα στοιχεία είναι α' βαθμού, τότε οι παράγωγοι είναι σταθεροί αριθμοί και η κατανομή των παραγώγων μεγεθών (π.χ. τάση) για κάποιο στοιχείο είναι σταθερή. Έτσι βλέπουμε ότι με την αύξηση της τάξης μεγέθους των στοιχείων, βελτιώνεται η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

2.3. Βασικές αρχές για την μη-γραμμική συμπεριφορά

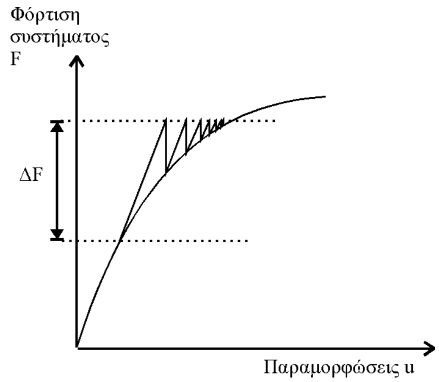
Όσα αναφέρθηκαν για την επίλυση με την μέθοδο ισχύουν για γραμμικά προβλήματα (όπως σε προβλήματα ελαστικότητας/μικρών παραμορφώσεων) όπου γίνεται μια απλή επίλυση της εξίσωσης [**K**].**u**=**F**, εφόσον ο [**K**] είναι γραμμικός τελεστής και κάθε αύξηση της **F** συνεπάγεται μια γραμμική/ανάλογη αύξηση της **u**. Σε μη-γραμμικά προβλήματα όπου δεν υπάρχει αυτή η γραμμική σχέση, εφαρμόζουμε βηματική επίλυση/ανακυκλώσεις. Σε ένα μη-γραμμικό πρόβλημα η σχέση [**K**].**u**=**F** μετασχηματίζεται σε [**K**].d**u**=d**F** όπου το [**K**] πια δεν είναι γραμμικός τελεστής αλλά είναι μεταβλητός (μη-γραμμικός) τελεστής που εξαρτάται από την ιστορία του προβλήματος (π.χ. φορτίσεις-αποφορτίσεις κλπ). Πρακτικά χρησιμοποιείται η σχέση [**K**].Δ**u**=Δ**F** διότι χωρίζουμε το πρόβλημά μας σε πεπερασμένα βήματα και όχι σε απειροστά (π.χ. βηματική αύξηση των φορτίων). Όσο περισσότερα είναι τα βήματα στα οποία υποδιαιρούμε το πρόβλημα τόσο καλύτερη ακρίβεια παίρνουμε στα αποτελέσματα, όμως τα βήματα που απαιτούνται για καλή ακρίβεια είναι τόσο πολλά που οι υπολογισμοί γίνονται ασύμφοροι. Αυτή είναι η μέθοδος της απευθείας ολοκλήρωσης, όμως υπάρχουν και άλλες μέθοδοι που μπορούν να δώσουν καλύτερη ακρίβεια με λιγότερους υπολογισμούς.

Έτσι κάνοντας ένα βήμα με κάποια αύξηση Δ**F**, υπολογίζουμε το Δu από τη σχέση [**K**].Δ**u**=Δ**F**. Επειδή η σχέση (Δ**u**, Δ**F)** όπως αναφέραμε δεν είναι γραμμική, το Δ**u** που υπολογίζουμε έχει σφάλμα. Έτσι αν πολλαπλασιάσουμε τον τελεστή [**K**] με το Δ**u** δεν λαμβάνουμε το αρχικό Δ**F** αλλά ένα Δ**f**, ώστε υπάρχει ένα έλλειμμα ισορροπίας **R**=Δ**F**-Δ**f**. Αυτή τη φορά επιλύουμε το πρόβλημα με φορτίο εισόδου το **R**. Μετά την επίλυση υπολογίζουμε ένα νέο R το οποίο το ξαναχρησιμοποιούμε ως νέο φορτίο κλπ ώσπου το R να γίνει αρκετά μικρό (σύγκλιση). Την διαδικασία αυτή μπορούμε να τη δούμε στο Σχήμα 3 και ονομάζεται σύγκλιση Newton-Raphson [6] [13] .

Υπάρχουν και τροποποιημένες μέθοδοι Newton-Raphson οι οποίες δεν υπολογίζουν κάθε φορά ένα νέο [**K**] αλλά χρησιμοποιούν το αρχικό (βλ. Σχήμα 4). Έτσι γίνεται οικονομία υπολογισμών εφόσον ο υπολογισμός και η αντιστροφή του [**K**] είναι πολύ χρονοβόρες διαδικασίες, αλλά χρειάζονται πολύ περισσότερες ανακυκλώσεις.



Σχήμα 3. Σύγκλιση με την μέθοδο Newton - Raphson

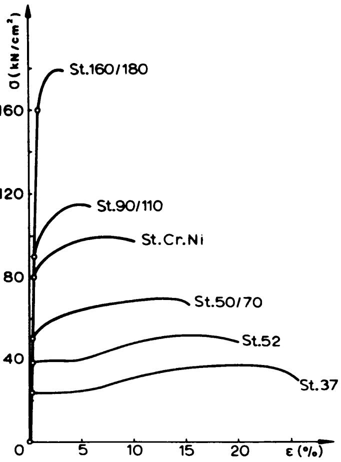


Σχήμα 4. Τροποποιημένη Newton – Raphson με σταθερή κλίση

Μη-γραμμική συμπεριφορά έχουμε σε διάφορες περιπτώσεις. Ειδική περίπτωση μη-γραμμικής συμπεριφοράς είναι τα προβλήματα που έχουν μεγάλες παραμορφώσεις ώστε η μεταβαλλόμενη γεωμετρία να επηρεάζει το πρόβλημα καθώς εξελίσσεται η φόρτιση. Ο πιο συνηθισμένος τύπος μη γραμμικής συμπεριφοράς είναι η πλαστικότητα, όπου έχουμε μη-γραμμική εξάρτηση τάσεων - παραμορφώσεων στο υλικό του προβλήματος σε αντίθεση με τα προβλήματα ελαστικότητας όπου θεωρείται γραμμική σχέση μεταξύ τάσεων και παραμορφώσεων (νόμος του Hook). Σε όλες τις περιπτώσεις μη-γραμμικής συμπεριφοράς όπως αναφέραμε το [**K**] μεταβάλλεται ανάλογα με την κατάσταση του υλικού και τις παραμορφώσεις που έχουν εκδηλωθεί.

2.4. Βασικές αρχές της πλαστικότητας

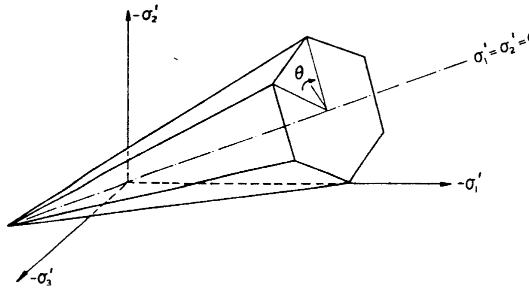
Η πλαστική ανάλυση σε μια διάσταση εκφράζεται από απλά διαγράμματα τάσεων παραμορφώσεων όπως αυτά στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5. Καμπύλες τάσεων – αν. παραμορφώσεων διαφόρων τύπων χάλυβα

Παρατηρούμε ότι από κάποιο σημείο και πέρα, όσο και αν αυξάνει η παραμόρφωση η τάση παραμένει περίπου σταθερή. Στη δε περίπτωση αποφόρτισης ένα μέρος της παραμόρφωσης αποδίδεται ελαστικά και ένα μέρος παραμένει ως μόνιμη παραμόρφωση.

Στην περίπτωση της ανάλυσης στις τρεις διαστάσεις η πλαστικότητα εκφράζεται από πιο σύνθετους νόμους. Οι νόμοι που ισχύουν στην πλαστικότητα ονομάζονται "νόμοι ροής" (flow rules) και γενικεύουν τον νόμο του Hook της ελαστικότητας. Στις τρεις διαστάσεις, η πλαστική συμπεριφορά χωρίζεται από την ελαστική με μία επιφάνεια αστοχίας. Η επιφάνεια αστοχίας μπορεί να σχεδιαστεί σε ένα χώρο αξόνων $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. Αν το παραστατικό σημείο των τάσεων περιέχεται μέσα στην επιφάνεια έχουμε ελαστική συμπεριφορά, αν δε το σημείο είναι πάνω στην επιφάνεια αστοχίας, έχουμε πλαστική συμπεριφορά. Η επιφάνεια μπορεί να είναι σταθερή (υλικό ελαστικό-τελείως πλαστικό), ή μπορεί να μεταβάλλεται (μεγαλώνει εν γένει) με την ιστορία των πλαστικών παραμορφώσεων (υλικό ελαστικό – πλαστικό-κρατυνόμενο). Ανάλογα με το κριτήριο αστοχίας η επιφάνεια έχει και διαφορετικό σχήμα, έτσι πχ. το κριτήριο του Von Mises περιγράφεται από ένα κύλινδρο στο χώρο $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$, ο δε άξονας του κυλίνδρου σχηματίζει γωνίες 45^o με τους άξονες και η ακτίνα του εξαρτάται από την αντοχή του υλικού. Στο Σχήμα 6 βλέπουμε την επιφάνεια αστοχίας για το κριτήριο Mohr-Coulomb.



Σχήμα 6. Επιφάνεια αστοχίας του κριτηρίου Mohr – Coulomb στον χώρο των σ_1, σ_2, σ_3

Η επιφάνεια αστοχίας δεν καθορίζει μόνο το σύνορο μεταξύ ελαστικής και πλαστικής συμπεριφοράς, αλλά καθορίζει και τον τρόπο που παραμορφώνεται το υλικό [10]. Αυτό γίνεται με τον νόμο ροής ο οποίος με την βοήθεια της επιφάνειας αστοχίας, δίνει τις ανηγμένες παραμορφώσεις της πλαστικότητας. Εν γένει ισχύει ο νόμος της καθετότητας (το διάνυσμα της διεύθυνσης των πλαστικών αν. παραμορφώσεων, είναι κάθετο στην επιφάνεια αστοχίας, στο σημείο των αντίστοιχων τάσεων).

Ο νόμος της καθετότητας, μας δίνει μηδενική μεταβολή όγκου στην πλαστικότητα σε κριτήρια όπως του Von Mises, ή και μεταβολή όγκου (dilatancy) σε κριτήρια όπως των Mohr-Coulomb. Αν αυτή η μεταβολή όγκου δεν έχει φυσικό νόημα (αυτό εξαρτάται από το υλικό) τότε μπορούμε να τροποποιήσουμε τον νόμο της καθετότητας, ώστε το διάνυσμα των παραμορφώσεων να μην είναι κάθετο στην επιφάνεια αλλά να έχει μια γωνία ανάλογα με τον επιθυμητό συντελεστή διόγκωσης.

Η άμμος για παράδειγμα έχει ως παραμέτρους αντοχής γωνία εσ. τριβής $\varphi=30^o$ και συνοχή c=0. Αυτό μεταφράζεται σε ανάλογη γωνία στον κώνο του κριτηρίου αστοχίας, και αν εφαρμοστεί ο νόμος της καθετότητας, θα είχαμε αφύσικα μεγάλες τιμές στην διόγκωση της άμμου κατά την πλαστική συμπεριφορά. Γι' αυτό κάνουμε τις κατάλληλες τροποποιήσεις στο νόμο ώστε η διόγκωση να παίρνει ρεαλιστικές τιμές.

Σε αυτό το κεφάλαιο, λοιπόν, είδαμε ορισμένες βασικές αρχές των πεπερασμένων στοιχείων, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στο πρόγραμμα που κατασκευάστηκε. Είδαμε την κατάστρωση των προβλημάτων όπως αναλύονται σε κόμβους και στοιχεία. Η λύση του προβλήματος ανάγεται στην επίλυση του [**K**].**u**=**F** για τα προβλήματα γραμμικής συμπεριφοράς. Είδαμε ορισμένα θέματα από την θεωρία της πλαστικότητας, όπως τους νόμους ροής. Έτσι στην ανάλυση των Π.Σ. σε προβλήματα μη γραμμικής συμπεριφοράς δεν ισχύει πια η σχέση [**K**].**u**=**F**, αλλά ισχύει η βηματική σχέση [**K**].Δ**u**=Δ**F** όπου το [**K**] ολοκληρώνει την μη γραμμική συμπεριφορά του υλικού λαμβάνοντας υπόψη τους νόμους ροής κλπ.

3. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

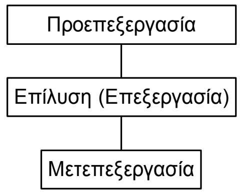
Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την υλοποίηση του προγράμματος των Π.Σ. [1] χρησιμοποιώντας τις αρχές που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ακόμα θα δούμε και ορισμένα θέματα όπως την θέαση του μοντέλου (visualization) που είναι χρήσιμα σε ένα τέτοιο πρόγραμμα αλλά δεν εξηγούνται στην θεωρία των Π.Σ. Έπειτα θα δούμε πώς υλοποιούνται στο πρόγραμμα αυτά τα θέματα.

3.1. Ιστορικά

Αρχικά θα αναφερθούμε στα συστήματα υπολογιστών που χρησιμοποιήθηκαν στην ιστορία εξέλιξης του προγράμματος. Οι πρώτες προσπάθειες για την κατασκευή του προγράμματος έγιναν τον Ιούλιο του 1995. Ο υπολογιστής που χρησιμοποιήθηκε ήταν PC 486/40MHz, έτρεχε MS-DOS και χρησιμοποιήθηκε γλώσσα Borland C++ 3.1. Το πρόγραμμα μπορούσε να λύσει απλά προβλήματα ελαστικότητας με τρισδιάστατα στοιχεία 8 κόμβων. Κατά τον Νοέμβριο-Δεκέμβριο του 1995, το πρόγραμμα είχε διορθωθεί από πολλά λάθη, και η ανάπτυξη συνεχίστηκε σε περιβάλλον UNIX. Η ανάπτυξη σε τέτοιο περιβάλλον έχει πολλά πλεονεκτήματα. Αρχικά υπάρχουν συστήματα UNIX με ισχύ που δεν διαθέτουν προσωπικοί υπολογιστές. Τέτοια συστήματα διέθετε και το Ε.Μ.Π. (κυρίως συστήματα IRIX της Silicon Graphics). Τα προγράμματα σε UNIX είναι απλούστερα από αυτά σε περιβάλλον DOS/WINDOWS κλπ, μπορούν εύκολα να διαθέσουν πολύ μεγάλα μεγέθη μνήμης. Ακόμα υπάρχει τεράστια υποστήριξη στον προγραμματισμό σε UNIX μέσω κοινοτήτων προγραμματιστών/πληροφορικών μηχανικών που επικοινωνούν με την βοήθεια του Internet.

Η γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε ήταν C/C++ η οποία είναι ένα Standard για το UNIX και είναι απόλυτα φορητή μεταξύ διαφορετικών συστημάτων UNIX. Τα συστήματα UNIX που χρησιμοποιήθηκαν ήταν : Ο διακομιστής Hermes (Ερμής) του κέντρου υπολογιστών του ΕΜΠ (Silicon Graphics με IRIX 5.3), σταθμός εργασίας Indigo 2 της Silicon Graphics με IRIX 6 του τμήματος Α.Τ.Μ. / Εργαστήριο Γεωπληροφορικής, σταθμός εργασίας Apollo 9 της Hewlett Packard του Εργαστηρίου Δομικής Μηχανικής και Στοιχείων τεχνικών έργων. Τέλος χρησιμοποιήθηκαν πολλοί προσωπικοί υπολογιστές που έτρεχαν σύστημα συμβατό με το UNIX. Το σύστημα που χρησιμοποιήθηκε στους προσωπικούς υπολογιστές ήταν το Linux. Το συγκεκριμένο σύστημα είναι απόλυτα συμβατό με τα υπόλοιπα UNIX συστήματα, είναι ελεύθερα διακινήσιμο (http://www.linux.org), και ιδιαίτερα σταθερό/ αξιόπιστο. Οι προσωπικοί υπολογιστές που χρησιμοποιήθηκαν ήταν από 486/40 MHz ενώ αυτήν την στιγμή χρησιμοποιούνται Pentium II 350 MHz με επιδόσεις ανάλογες ή και καλύτερες από Workstation. Κατά τον Ιανουαρίου του 1996 το πρόγραμμα άρχισε να αποκτά περιβάλλον γραφικής επικοινωνίας. Το σύστημα/εργαλείο για το γραφικό περιβάλλον του προγράμματος ήταν το “X-Forms Library” των Dr. T.C.Zhao και Mark Overmars. Οι βιβλιοθήκες αυτές διακινούνται ελεύθερα από το Internet (http://bragg.phys.uwm.edu/xforms). Με τη βοήθεια αυτών των βιβλιοθηκών κατασκευάζεται ένα περιβάλλον φιλικό στο χρήστη με τη βοήθεια παραθύρων, διακοπτών και άλλων διευκολύνσεων.

Αρχίζοντας την αναφορά στην κατασκευή του προγράμματος αναφέρουμε τις βασικές αρχές που έχουν αυτά τα προγράμματα: Γενικά η διαδικασία κατάστρωσης και επίλυσης ενός προβλήματος με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων με την βοήθεια Η/Υ περιέχει 3 στάδια, τα οποία περιγράφονται από το παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 7. Στάδια προγράμματος Π.Σ.

3.2. Επίλυση

Η επίλυση αναφέρεται στη μεθοδολογία/διαδικασία που περιγράφει η θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων για την επίλυση των προβλημάτων. Αν για παράδειγμα ασχοληθούμε με την περίπτωση των προβλημάτων γραμμικής συμπεριφοράς, τότε η επίλυση είναι η κατάστρωση των πινάκων [**K**], [**u**] και [**F**] από τα δεδομένα κόμβων-στοιχείων-φορτίσεων-δεσμεύσεων, και η επίλυση του συστήματος εξισώσεων. Η διαδικασία του υπολογισμού των παραγώγων μεγεθών (π.χ. τάσεις), μπορεί να ανήκει στην διαδικασία της επίλυσης αλλά και της μετεπεξεργασίας. Στο πρόγραμμά μας αυτή η διαδικασία ανήκει στην κατηγορία της επίλυσης, διότι τα παράγωγα μεγέθη είναι απαραίτητα για την επίλυση βηματικών προβλημάτων καθώς και προβλημάτων με κύκλους σύγκλισης.

Οι ρουτίνες που περιέχονται στο στάδιο της επίλυσης κάνουν γενικά απλές πράξεις πινάκων, όπως πολλαπλασιασμούς, αντιστροφές, κλπ. Το μεγαλύτερο ενδιαφέρον στην διαδικασία της επίλυσης παρουσιάζεται στην κατάστρωση του πίνακα [**K**] καθώς και στην επίλυση του συστήματος εξισώσεων.

Για την κατάστρωση του πίνακα [**K**] υπάρχουν δύο διαφορετικές ρουτίνες ανάλογα με το αν καταστρώνεται [**K**] για σημείο Gauss με γραμμική ή μη-γραμμική συμπεριφορά.

Και για τις δύο περιπτώσεις για κάθε σημείο Gauss γίνεται υπολογισμός της συνεισφοράς του στο καθολικό μητρώο [**K**] πολλαπλασιάζοντας την συνεισφορά με κάποιο βάρος w που μας δίνει η μέθοδος ολοκλήρωσης Gauss. Ο υπολογισμός όπως αναφέραμε γίνεται με έναν από δύο τρόπους:

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε απλούς πολλαπλασιασμούς πινάκων, όπως των πινάκων [$\mathbf{J}^{-1}$] (αντίστροφος της ιακωβιανής της απεικόνισης από το σύστημα ξ,η,ζ στο σύστημα X,Y,Z), [**B**] (παράγωγοι των πολυωνύμων μορφής), και [**D**] (πίνακας υπολογισμού του τανυστή των τάσεων από τον τανυστή των αν. παραμορφώσεων).

Στην δεύτερη περίπτωση το [**D**] δεν εξαρτάται μόνο από το υλικό αλλά και από την εντατική κατάσταση του σημείου Gauss έτσι το [**D**] ονομάζεται [**D**ep]=[**D**]-[**D**p] όπου το [**D**p] υπολογίζεται από τους νόμους ροής κατά την μετελαστική συμπεριφορά. Έτσι έχουμε επιπλέον ρουτίνες για να υπολογιστεί αυτό το μητρώο, οι οποίες μπορούν να είναι διαφορετικές ανάλογα με το μοντέλο ελαστοπλαστικής συμπεριφοράς. Για λόγους ευελιξίας ενσωματώσαμε τις δύο αυτές ρουτίνες σε μια υπερρουτίνα που καλύπτει όλες τις περιπτώσεις.

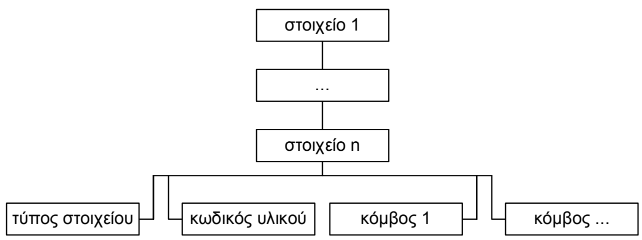
Η αντιστροφή του πίνακα γίνεται με την μέθοδο “Skyline”. Αυτή η μέθοδος έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Μειώνει δραστικά τους υπολογισμούς σε συστήματα εξισώσεων όπου τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα είναι κοντά στην διαγώνιο σε ένα εύρος που ονομάζεται HBW (Half Bandwidth/ Ημιεύρος).

- Μειώνει ακόμα περισσότερο τους υπολογισμούς εάν υπάρχει σαφές σύνορο μεταξύ μηδενικών και μη-μηδενικών στοιχείων το οποίο βρίσκεται μέσα στο σύνορο του εύρους του HBW.

3.3. Προεπεξεργασία, μετεπεξεργασία, δομές, ολοκλήρωση

Η προεπεξεργασία αναλαμβάνει να ετοιμάσει τα δεδομένα για την επίλυση. Δηλαδή, θα ετοιμάσει κάποια μητρωικά μεγέθη τα οποία η διαδικασία της επίλυσης θα τα χρησιμοποιήσει για να επιλύσει το πρόβλημα. Ο προεπεξεργαστής μπορεί να αντλήσει δεδομένα από ένα αρχείο δεδομένων ή μπορεί να καταστρώσει το πρόβλημα κατά την εκτέλεση, συνήθως με την βοήθεια κάποιου γραφικού περιβάλλοντος ή με την βοήθεια γραμμών εντολών. Ο προεπεξεργαστής, δηλαδή, ετοιμάζει τις δομές των δεδομένων όπως τις χρειάζεται ο επεξεργαστής για να κάνει την επίλυση. Για παράδειγμα, στο πρόγραμμα ο επεξεργαστής περιμένει τα δεδομένα των στοιχείων σε ένα μητρώο το οποίο περιέχει σε σειρά τον τύπο του στοιχείου, τον κωδικό του υλικού που χρησιμοποιείται και μετά σε σειρά οι κόμβοι από τους οποίους συναρμολογείται το στοιχείο. Την δομή των δεδομένων των στοιχείων μπορούμε να την δούμε στο Σχήμα 8:



Σχήμα 8. Δομή στοιχείου

Το πρόγραμμα διατηρεί και άλλες δομές δεδομένων στις οποίες θα αναφερθούμε αργότερα. Αφού γίνει η επίλυση, ακολουθεί η μετεπεξεργασία που στην ουσία είναι η αξιοποίηση των αποτελεσμάτων της επίλυσης. Αρχικά γίνονται υπολογισμοί παραγώγων μεγεθών. Έπειτα το πρόγραμμα μπορεί να εξαγάγει τα αποτελέσματα είτε στην οθόνη, είτε σε αρχείο, είτε να αναλάβει την γραφική έξοδο των αποτελεσμάτων.

Τα τρία αυτά στάδια (προεπεξεργασία, επίλυση, μετεπεξεργασία) μπορούν να αποτελούνται από 3 διαφορετικά προγράμματα, ή να ολοκληρώνονται σε ένα πρόγραμμα (αυτή είναι και η λύση που ακολουθήθηκε). Η ολοκλήρωση σε ένα πρόγραμμα έχει το επιπλέον πλεονέκτημα να έχει κοινές δομές δεδομένων για τα τρία στάδια καθώς και κοινά τμήματα μέσα στο πρόγραμμα, όπως οι ρουτίνες για την γραφική απεικόνιση, οι οποίες είναι και από τις σημαντικότερες.

Το πρόγραμμα αποθηκεύει δεδομένα σε δομές με διάφορους τρόπους αποθήκευσης. Έτσι, οι δείκτες είναι μεγάλοι ακέραιοι (καταλαμβάνοντας 4 bytes έκαστος) ενώ όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι απλής ακρίβειας (καταλαμβάνοντας 4 bytes έκαστος). Αριθμοί διπλής ακρίβειας δεν χρησιμοποιούνται διότι απαιτούν διπλάσιο χώρο για την αποθήκευσή τους και παρέχουν όχι χρήσιμη ακρίβεια, πέρα από αυτήν των δεδομένων που εισάγουμε και από αυτή που απαιτούμε από την έξοδο του προγράμματος. Οι κύριες δομές που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα είναι οι εξής :

- Δομή κόμβων, που περιέχει τους κόμβους σε σειρά, κάθε κόμβος περιγράφεται από τις συντεταγμένες του, το έλλειμμα για την ισορροπία καθώς και τις αρχικές συντεταγμένες του κόμβου για τον υπολογισμό της παραμόρφωσης του πεδίου.

- Δομή στοιχείου, που περιέχει τα στοιχεία σε σειρά, κάθε στοιχείο περιγράφεται από τον τύπο του (π.χ. κύβος 8 κόμβων ή 20 κλπ), τον κωδικό του υλικού, τους κόμβους στους οποίους συναρμολογείται σε σειρά και κάποια στοιχεία για την πλαστικότητα.

- Δομή υλικών, με διάφορα υλικά σε σειρά με τις φυσικές τους ιδιότητες αποθηκευμένες.

- Δομές για τα φορτία και τις στηρίξεις, όπου περιέχονται βαθμοί ελευθερίας και τιμές φορτίων ή αρχικών μετατοπίσεων (για τις στηρίξεις).

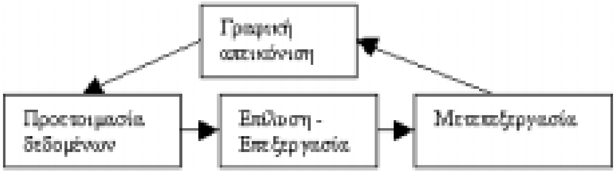
- Για κάθε σημείο Gauss, από τα 27 κάθε στοιχείου, υπάρχει δομή που αποθηκεύει τις προϋπάρχουσες τάσεις από τα προηγούμενα βήματα/ανακυκλώσεις.

- Ακόμα. υπάρχουν και άλλες εσωτερικές δομές πολλές από αυτές δημιουργούνται σε ορισμένα σημεία του προγράμματος και όταν δεν είναι χρήσιμες σβήνονται όπως: Δομές πολυγώνων απεικόνισης, δομές συντεταγμένων σημείων Gauss, και φυσικά διάφορα απαραίτητα μητρώα για τους υπολογισμούς.

- Τέλος, χρησιμοποιούνται διάφορες τάξεις (classes) της C++, οι οποίες δεν αποθηκεύουν δεδομένα, αλλά χρησιμοποιούνται σε υπολογισμούς.

3.4. Γραφική απεικόνιση

Ένα κύριο χαρακτηριστικό του προγράμματος είναι το σύστημα γραφικής απεικόνισης που διαθέτει. Αυτό το σύστημα κάνει το πρόγραμμα φιλικότερο στον χρήστη αλλά έχει και ουσιαστική αξία στην κατάστρωση του προβλήματος αλλά και στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων με αυξημένη εποπτεία. Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε πώς επιδρά η γραφική απεικόνιση στα 3 στάδια του προγράμματος:



Σχήμα 9. Αλληλεπίδραση γραφικής απεικόνισης με τα υπόλοιπα στάδια του προγράμματος

Η γραφική απεικόνιση αναλαμβάνει να προβάλει τις παρακάτω τρισδιάστατες οντότητες στο επίπεδο της οθόνης:

- Τους κόμβους ως σημεία με ειδικό διακριτικό και αρίθμηση εάν αυτό ζητείται.

- Τα στοιχεία ως πολύπλευρα στερεά με γραμμική απεικόνιση ("συρμάτινα γραφικά") ή με σκιασμένες πλευρές. Η πρώτη μέθοδος χρησιμοποιείται κυρίως κατά την κατάστρωση του προβλήματος ενώ η δεύτερη κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Κατά την παρουσίαση των σκιασμένων στερεών υπάρχει η δυνατότητα απεικόνισης των τιμών από την επίλυση με χρωματικές διαβαθμίσεις πάνω στα στερεά.

- Τους κόμβους όπου υπάρχουν δεσμεύσεις με ειδικά σύμβολα

- Τις φορτίσεις με γραμμές στους κόμβους (σημειακά φορτία), ή με ειδικό συμβολισμό στις πλευρές στοιχείων (επιφανειακές φορτίσεις)

Η γραφική απεικόνιση γίνεται με την βοήθεια μιας απεικόνισης από τον χώρο στο επίπεδο της οθόνης [14]. Ο τύπος για αυτήν την απεικόνιση είναι ο:

$$\mathbf{[x_v,y_v,z_v,1]=[x_w,y_w,z_w,1]T_{view}} \quad (3.1)$$

Το πρώτο διάνυσμα είναι οι συντεταγμένες στο σύστημα της οθόνης, το δεύτερο είναι οι καθολικές συντεταγμένες ενώ το μητρώο 4x4 T_{view} περιέχει τις πληροφορίες για την θέση και την γωνία ως προς τους καθολικούς άξονες X,Y,Z μιας υποθετικής κάμερας. Στην οθόνη απεικονίζουμε το ζεύγος $[c.x_v,c.y_v]$ για την αξονομετρική προβολή ή το ζεύγος $[c.x_v/z_v,c.y_v/z_v]$ για την προοπτική προβολή όπου το c είναι ο βαθμός μεγέθυνσης.

Εκτός από την γραφική απεικόνιση για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων υπάρχει η δυνατότητα εξόδου των τιμών σε ειδικό αρχείο εξόδου ή σε συνηθισμένο αρχείο δεδομένων το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάποιο επόμενο βήμα.

Τα αρχεία δεδομένων περιέχουν εκτός από τα βασικά δεδομένα, όπως γεωμετρικά στοιχεία, υλικά, φορτίσεις και δεσμεύσεις, δεδομένα για την ιστορία του προβλήματος όπως τάσεις στα σημεία Gauss, ελλείμματα ισορροπίας στους κόμβους κ.α. Έτσι όπως αναφέραμε, αποθηκεύοντας το αρχείο δεδομένων ενός προβλήματος που έχει επιλυθεί αποθηκεύουμε όλη την ιστορία του προβλήματος, και μπορούμε να συνεχίσουμε σε κάποιο επόμενο στάδιο την επίλυση προσθέτοντας διαφορετικά φορτία, αλλάζοντας την γεωμετρία (όπως κάνοντας εκσκαφή) κ.α.

3.5. Λοιπές διαδικασίες

Εκτός από τις βασικές ρουτίνες για προεπεξεργασία, επίλυση και μετεπεξεργασία υπάρχουν και οι ρουτίνες που ελέγχουν την βηματική επίλυση καθώς και τις πολλαπλές ανακυκλώσεις για την σύγκλιση σε προβλήματα μη-γραμμικής συμπεριφοράς. Βασικά αυτές οι ρουτίνες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Στις ρουτίνες όπου υπάρχει κάποιος μετρητής και επιβάλλονται κάποια πεπερασμένα βήματα φορτίσεων. Γίνονται τόσα βήματα ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη αυτού του μετρητή. Σε κάθε βήμα γίνεται επαναφόρτιση.

- Στις ρουτίνες ανακυκλώσεων όπου τερματίζονται όταν πληρούνται κάποιες συνθήκες σύγκλισης ή υπέρβασης ενός αριθμού ανακυκλώσεων. Κατά την διάρκεια αυτών των ανακυκλώσεων δεν γίνεται επαναφόρτιση παρά μόνο φόρτιση με τα ελλείμματα ισορροπίας ώστε αυτά να μειωθούν και να ικανοποιούν την συνθήκη που θα σταματήσει τις ανακυκλώσεις.

Σημαντικές ρουτίνες ακόμα είναι αυτές για την εισαγωγή των δεδομένων στις οποίες θα αναφερθούμε στο επόμενο κεφάλαιο καθώς και οι ρουτίνες βελτιστοποίησης στις οποίες θα γίνει άμεση αναφορά:

Αρχικά, κατά την κατάστρωση του προβλήματος μπορούν να δημιουργηθούν άχρηστα στοιχεία όπως:

- Κόμβοι που έχουν τις ίδιες συντεταγμένες ώστε να μη γίνεται σωστή συναρμολόγηση στοιχείων.

- Κόμβοι που δεν ανήκουν σε κάποιο στοιχείο, οι οποίοι προκαλούν κατάρρευση της λύσης διότι είναι βαθμοί ελευθερίας χωρίς ακαμψία και δεν επιτρέπουν στο μητρώο **[K]** να αντιστραφεί

- Φορτία και δεσμεύσεις σε κόμβους των παραπάνω κατηγοριών.

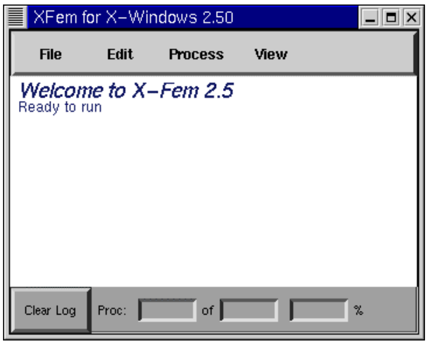
Το κομμάτι της βελτιστοποίησης αρχικά εξαλείφει τα παραπάνω σφάλματα και έπειτα κάνει μια βελτιστοποίηση στην αρίθμηση. Η βελτιστοποίηση στην αρίθμηση των κόμβων είναι πολύ σημαντική για την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων διότι όπως αναφέραμε φέρνει τις μη μηδενικές τιμές του πίνακα **[K]** πιο κοντά στη διαγώνιό του μειώνοντας δραστικά τις απαιτήσεις για αποθήκευση και μειώνοντας ικανοποιητικά τους απαιτούμενους υπολογισμούς.

Η βελτιστοποίηση της αρίθμησης έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση της διαφοράς των δεικτών των κόμβων ενός στοιχείου από τον δείκτη του στοιχείου. Η μεγαλύτερη απόσταση δεικτών των κόμβων σε ένα στοιχείο μεταφράζεται και σε ανάλογο εύρος κατάληψης μη-μηδενικών τιμών περί την διαγώνιο του **[K]**. Ο Αλγόριθμος που χρησιμοποιείται είναι σχετικά απλός:

Εντοπίζονται δύο κόμβοι οι οποίοι έχουν μεταξύ τους την μεγαλύτερη δυνατή απόσταση. Έπειτα γίνεται ταξινόμηση στους άλλους κόμβους ανάλογα με την απόσταση από τον αρχικό κόμβο.

4. ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γίνει μια εκτενής αναφορά στις δυνατότητες του προγράμματος που αναπτύχθηκε. Θα παρουσιαστούν τμήματα του προγράμματος και όπου είναι αναγκαίο θα γίνεται και αναφορά σε θεωρητικά θέματα. Το κεφάλαιο θα χωριστεί σε διαφορετικές ενότητες, αρχικά των δεδομένων που διαχειρίζεται (στοιχεία, κόμβοι, δεσμεύσεις, υλικά), της διαδικασίας επίλυσης και έπειτα ορισμένων εξειδικευμένων δυνατοτήτων όπως αυτής της παρουσίασης των αποτελεσμάτων.



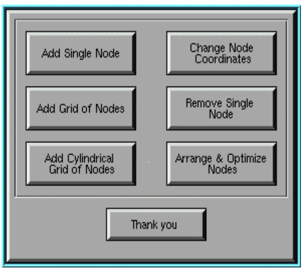
Σχήμα 9a. Το κύριο παράθυρο του προγράμματος XFem

4.1. Κόμβοι

Το πρόγραμμα, όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο αποθηκεύει τους κόμβους σε δομές όπου περιέχονται:

- Τα γεωμετρικά στοιχεία θέσης (αρχικές και τρέχουσες συντεταγμένες)
- Τα ελλείμματα ισορροπίας σε κάθε κόμβο

Η διαχείριση των κόμβων γίνεται από ένα κεντρικό παράθυρο το οποίο μπορούμε να δούμε παρακάτω:

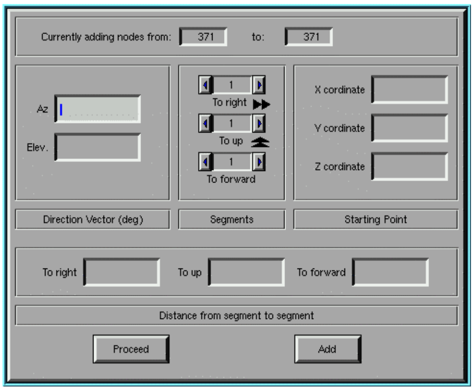


Σχήμα 10. Παράθυρο διαχείρισης κόμβων

Η εισαγωγή των κόμβων γίνεται με τους εξής τέσσερις διαφορετικούς τρόπους:

- Εισαγωγή μεμονωμένου κόμβου εισάγοντας τις συντεταγμένες του
- Εισαγωγή πολλών κόμβων διατεταγμένων σε κανονικό κάναβο. Σε αυτή την περίπτωση ορίζεται ένας κανονικός κάναβος με ένα αρχικό σημείο, μία διεύθυνση στο χώρο και οι επιθυμητές αποστάσεις μεταξύ των κόμβων
- Εισαγωγή πολλών κόμβων σε κυλινδρικές επιφάνειες, με διάφορες δυνατότητες όπως μετάβαση της γεωμετρίας από κυλινδρική σε ορθογωνική
- Εισαγωγή κόμβων από αρχείο τύπου “DXF” (π.χ. από το AutoCAD).

Ο χρήστης έχει την δυνατότητα να διαγράψει μεμονωμένους κόμβους ή να αλλάξει τις συντεταγμένες του. Ακόμα μπορεί να εφαρμόσει τη διαδικασία της βελτιστοποίησης όπως αυτή περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

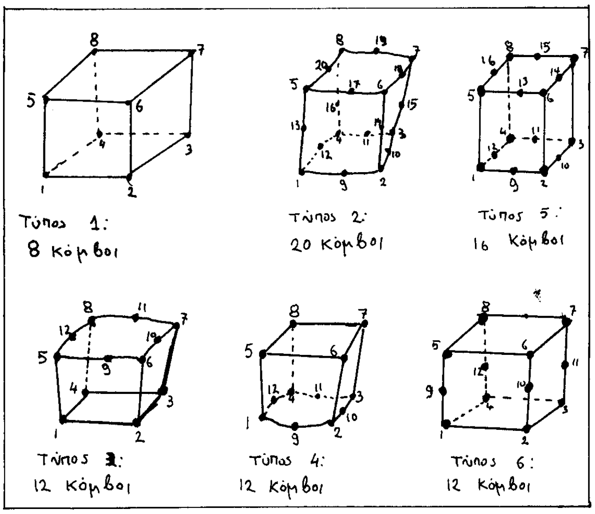


Σχήμα 11. Παράθυρο δημιουργίας νέων κόμβων σε κανονική διάταξη

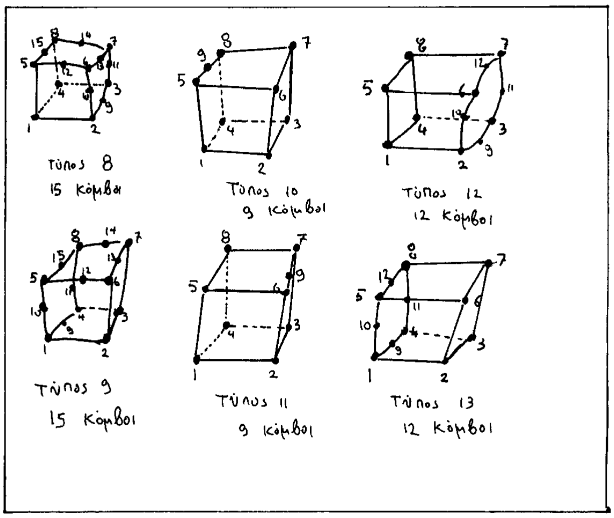
Οι κόμβοι απεικονίζονται μόνο στα “συρμάτινα” γραφικά εφόσον το ζητήσει ο χρήστης με την βοήθεια σημείων περιγραμμένων από μικρά τετράγωνα. Ακόμα αν ζητηθεί μπορεί να εμφανίζεται και η αρίθμηση των κόμβων

4.2. Στοιχεία

Το πρόγραμμα διαθέτει διαφορετικούς τύπους στοιχείων με διαφορετικό αριθμό κόμβων ανά στοιχείο. Ανάλογα με την ακρίβεια που ζητείται μπορεί να επιλεχθεί και ο ανάλογος τύπος στοιχείων. Στα δύο παρακάτω σχήματα απεικονίζονται οι διαφορετικοί τύποι στοιχείων:



Σχήμα 12. Τύποι στοιχείων 1-6



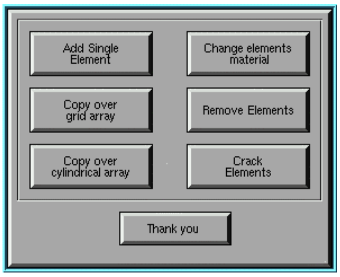
Σχήμα 13. Τύποι στοιχείων 8-13

Γενικά, τα στοιχεία που έχουν μόνο τους απαραίτητους κόμβους για να οριστεί το στοιχείο, π.χ. 8 κόμβους για ένα κυβικό στοιχείο (όσο οι κορυφές ενός κύβου) λέγονται στοιχεία πρώτου βαθμού. Όταν υπάρχουν επιπλέον κόμβοι τότε έχουμε στοιχεία ανωτέρου βαθμού. Το πρόγραμμα όπως βλέπουμε στο σχήμα διαθέτει στοιχεία α' βαθμού (στοιχείο 1), στοιχεία β' βαθμού (στοιχείο 2) καθώς και στοιχεία μετάβασης από στοιχεία α' σε β' βαθμού (όλα τα υπόλοιπα στοιχεία).

Το πρόγραμμα διαθέτει μια δομή για τα στοιχεία που εκτός από τον τύπο του στοιχείου αποθηκεύει και τα παρακάτω δεδομένα:

- Τύπος (κωδικός αριθμός) υλικού
- Κόμβοι πάνω στους οποίους κατασκευάζεται το στοιχείο. Η σειρά των κόμβων εξαρτάται από την σειρά των κόμβων που προδιαγράφει ο τύπος του στοιχείου.

Όπως και στους κόμβους, έτσι και στα στοιχεία η διαχείριση γίνεται από ένα κεντρικό παράθυρο που φαίνεται παρακάτω:

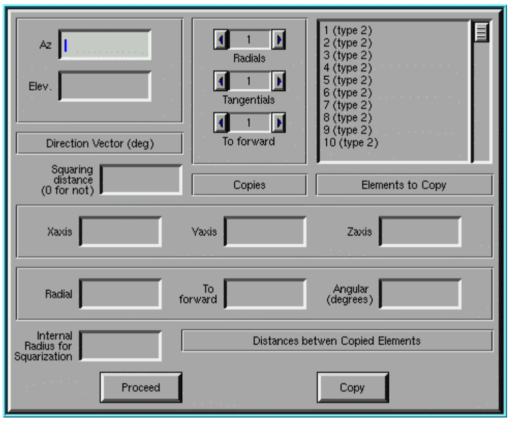


Σχήμα 14. Παράθυρο διαχείρισης στοιχείων

Το πρόγραμμα μπορεί με τις επιλογές που φαίνονται στο πιο πάνω παράθυρο να:

- Κατασκευάσει ένα μεμονωμένο στοιχείο εισάγοντας με την βοήθεια του ποντικιού τους κόμβους που το αποτελούν και εισάγοντας τον τύπο του στοιχείου καθώς και τον τύπο του υλικού.
- Διαγράψει κάποια στοιχεία
- Αλλάξει το υλικό ομάδας στοιχείων
- Αντιγράψει στοιχεία σε ορθωγονική διάταξη δίνοντας αριθμό αντιγράφων κατά μήκος, κατά πλάτος, καθ' ύψος , διεύθυνση στον χώρο και ισαποστάσεις.
- Αντιγράψει στοιχεία σε κυλινδρική διάταξη
- Προκαλέσει θραύση στοιχείου μηδενίζοντας τις τάσεις του στοιχείου και μεταφέροντας τις τάσεις να εκτονωθούν στις υπόλοιπες ανακυκλώσεις μέσω των ελλειμμάτων ισορροπίας. Αυτή η δυνατότητα είναι χρήσιμη στην εξομοίωση εκσκαφής.

Ο χρήστης ακόμα μπορεί να παράγει στοιχεία τριών διαστάσεων ορίζοντας σχήματα σε δύο διαστάσεις και δίνοντας κάποιο βάθος και κάποια διεύθυνση. Έτσι για παράδειγμα μπορεί να δείξει 4 κόμβους, οι οποίοι είναι πάνω σε ένα επίπεδο, να δώσει αριθμητικά κάποιο βάθος και έτσι να παραγάγει ένα κυβικό στοιχείο.



Σχήμα 15. Παράθυρο για την αντιγραφή στοιχείων σε κυλινδρική διάταξη

Τα στοιχεία, γραφικά, απεικονίζονται με δύο τρόπους:

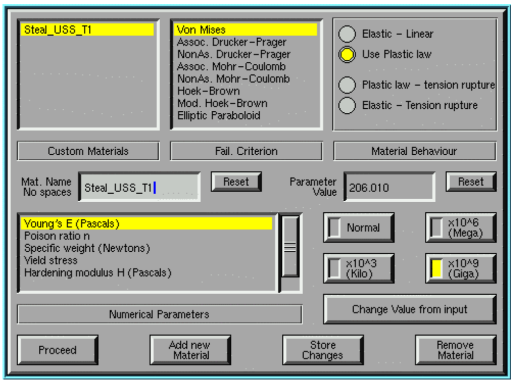
- Με τα «συρμάτινα» γραφικά απεικονισμένα με ευθύγραμμα τμήματα. Ο χρήστης ορίζει ένα βαθμό πύκνωσης βάσει του οποίου μια πλευρά μπορεί να απεικονίζεται με 4 ευθ. τμήματα ή περισσότερα τετράπλευρα ανά πλευρά. Η πύκνωση χρειάζεται για να απεικονιστούν σωστά, στοιχεία ανωτέρου βαθμού που η πλευρά του στοιχείου μπορεί να έχει καμπυλότητα.

- Με στερεά γραφικά. Έτσι οι πλευρές απεικονίζονται με γεμάτα πολύγωνα τα οποία επί πλέον μπορούν να έχουν κάποια φωτοσκίαση. Για τον σκοπό αυτό θεωρείται πηγή φωτός η οποία βρίσκεται στο σημείο του παρατηρητή. Τα στερεά γραφικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για προεπισκόπηση των τρισδιάστατων σχημάτων ή για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων στην οποία θα αναφερθούμε παρακάτω.

4.3. Υλικά

Το πρόγραμμα διαθέτει μια δομή για υλικά η οποία επιτρέπει την χρήση υλικών με διαφορετικά κριτήρια αστοχίας και διαφορετικών ειδών παραμέτρων.

Τα υλικά μπορούν να είναι ελαστικά ή και ελαστοπλαστικά. Για όλα τα υλικά εισάγεται το μέτρο ελαστικότητας σε KPa, ο λόγος εγκάρσιας διαστολής ν και το ειδικό βάρος (KN/m^3). Υπάρχει ακόμα δυνατότητα χρήσης υλικών με περιορισμένη εφελκυστική αντοχή (εισάγοντας αριθμητικό όριο αντοχής).



Σχήμα 16. Παράθυρο διαχείρισης ιδιοτήτων υλικών

Τα κριτήρια αστοχίας είναι συνάρτηση των παραμέτρων αντοχής καθώς και των αναλλοίωτων του τανυστή τάσεων (I_1, J'_2, θ) [10]. Τα κριτήρια αστοχίας που χρησιμοποιούνται είναι τα παρακάτω:

- Κριτήριο von Mises με παράμετρο αντοχής την σ_Y (όριο διαρροής). Το κριτήριο:

$$\sqrt{3}\sqrt{J_2'}-\sigma_Y=0 \tag{4.1}$$

- Κριτήριο Mohr-Coulomb [9] με παράμετρους φ και c. Βάσει αυτού του κριτηρίου, υπάρχουν δύο κριτήρια τα οποία υπολογίζουν διαφορετικά τις πλαστικές παραμορφώσεις (Associative και non Associative Mohr-Coulomb). Στο ένα χρησιμοποιείται ο νόμος της καθετότητας (οπότε το διάνυσμα των πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων είναι κάθετο στην επιφάνεια του κριτηρίου) ενώ στο άλλο ο χρήστης μπορεί να ρυθμίσει την γωνία μεταξύ του διανύσματος των πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων και της επιφάνειας του κριτηρίου. Το κριτήριο:

$$\frac{I_1}{3}\sin\phi+\sqrt{J_2'}\cos\phi-\frac{\sqrt{J_2'}}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\phi-c\cos\phi=0 \tag{4.2}$$

- Κριτήριο Drucker-Prager [4] [6], το οποίο είναι μια προσέγγιση του κριτηρίου Mohr - Coulomb με τροποποίηση του κριτηρίου Von Mises. Οι παράμετροι είναι πάλι φ και c από τις οποίες προκύπτουν οι *α* & *k'*, ενώ υπάρχει πάλι associative και non associative μορφή. Το κριτήριο:

$$aI_1+\sqrt{3}\left(J_2'\right)^{1/2}-k'=0 \tag{4.3}$$

- Κριτήριο ελλειπτικού παραβολοειδούς, το οποίο είναι μια βελτίωση του κριτηρίου Von Mises, ώστε να περιέχεται και η διαφορετική αντοχή σε εφελκυσμό (σ_T) από θλίψη (σ_c). Το κριτήριο:

$$3J_2'+(\sigma_c-\sigma_T)I_1-\sigma_c\sigma_T=0 \tag{4.4}$$

- Κριτήριο Hoek-Brown[15]. Είναι το κριτήριο που εκφράζει καλύτερα την αντοχή της βραχομάζας. Οι παράμετροι που δέχεται είναι οι m και s καθώς και η θλιπτική αντοχή αδιατάραχτου δείγματος σ_c. Υπάρχει και μια τροποποιημένη μορφή του κριτηρίου που έχει προγραμματιστεί. Το κριτήριο:

$$\frac{m\sigma_c I_1}{3}+4J_2'\cos^2\theta+m\sigma_c\sqrt{J_2'}(\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}})-s\sigma_c^2=0 \tag{4.5}$$

Γενικά, η ανοικτή δομή του προγράμματος στο θέμα των υλικών, επιτρέπει την εύκολη προσθήκη νέων κριτηρίων αστοχίας.

Το πρόγραμμα διαθέτει μια μικρή βιβλιοθήκη υλικών αλλά επιπλέον επιτρέπει την προσθήκη υλικών του χρήστη για κάθε πρόβλημα που επιλύεται. Ο χρήστης μπορεί με το παράθυρο που φαίνεται στο Σχήμα 16 να προσθέσει νέα υλικά και να ορίσει τον τύπο του υλικού, τα μοντέλα συμπεριφοράς καθώς και να δώσει τιμές σε όλες τις παραμέτρους.

4.4. Δεσμεύσεις - Φορτία

Τα φορτία αποθηκεύονται σε διαφορετικές δομές δεδομένων ανάλογα με το είδος τους (σημειακά, επιφανειακά ή μαζικά φορτία). Για τα σημειακά φορτία αποθηκεύεται η τιμή φορτίου, ο αριθμός κόμβου όπου ενεργεί το φορτίο, καθώς και ο άξονας δράσης. Για τα επιφανειακά φορτία, αποθηκεύεται εκτός από την τιμή του φορτίου και τον άξονα δράσης, ο αριθμός στοιχείου και η πλευρά του που γίνεται η δράση. Για τα μαζικά φορτία (π.χ. ίδιο βάρος) αντίστοιχα αποθηκεύονται οι ίδιες πληροφορίες εκτός της πλευράς που γίνεται η δράση. Οι δεσμεύσεις ως προς την δομή τους είναι ίδιες με τα σημειακά φορτία δηλαδή αποθηκεύεται αριθμός κόμβου, διεύθυνση καθώς και μια τιμή που αντιπροσωπεύει την αρχική παραμόρφωση (χρήση π.χ. σε προβλήματα με υποχωρήσεις στηρίξεων). Για ευκολία του χρήστη υπάρχουν και έτοιμες στηρίξεις που δεσμεύουν όλους τους βαθμούς ελευθερίας.

Η διαχείριση αυτών των δεδομένων γίνεται πάλι από διάφορα παράθυρα με ευκολίες για τον χρήστη και δεν κάνουμε εκτενή αναφορά. Αναφερόμαστε μόνο στα εξής κύρια σημεία:

Για τις δεσμεύσεις καθώς και για τα επιφανειακά φορτία, ο χρήστης μπορεί να ορίσει κάποια περιοχή στο χώρο και το πρόγραμμα αυτόματα να γεμίζει αυτή την περιοχή με στηρίξεις ή φορτία. Στα μαζικά φορτία υπάρχει η δυνατότητα ή να φορτιστούν μεμενωμένα στοιχεία ή να φορτιστούν όλα τα στοιχεία με κάποια τιμή για όλα τα στοιχεία ή με τιμή που εξαρτάται από το ειδικό βάρος του υλικού κάθε στοιχείου.

4.5. Επίλυση

Η διαδικασία της επίλυσης ξεκινάει όταν το ζητήσει ο χρήστης επιλέγοντας κάποια εντολή από κάποιο σχετικό παράθυρο. Το παράθυρο αυτό είναι το παρακάτω:

Σχήμα 17. Παράθυρο επιλογών για την επίλυση - επεξεργασία

Ο χρήστης με αυτό το παράθυρο επιλέγει τον αριθμό των βηματικών φορτίσεων, στοιχεία για τις ανακυκλώσεις με σκοπό τη σύγκλιση καθώς και ορισμένα άλλα στοιχεία, όπως αν σε κάθε βήμα ή ανακύκλωση, οι μετατοπίσεις στους κόμβους θα αλλάζουν την γεωμετρία του προβλήματος, καθώς και τη δυνατότητα σε κάθε βήμα να εγγράφεται αρχείο εξόδου ή/και αρχείο αποτελεσμάτων.

Για τον έλεγχο των ανακυκλώσεων, ο χρήστης μπορεί να εισάγει τον μέγιστο αριθμό ανακυκλώσεων καθώς και κάποια ποσοστά βάσει των οποίων ελέγχεται η σύγκλιση. Συγκεκριμένα ελέγχονται τα ελλείμματα ισορροπίας, αν έχουν γίνει μικρότερα από ένα ποσοστό των αρχικών φορτίων, καθώς και εάν οι παραμορφώσεις σε κάποιο «n» κύκλο έχουν γίνει μικρότερες από κάποιο ποσοστό των παραμορφώσεων από τον «1» κύκλο. Για να έχει ο χρήστης καλύτερη εποπτεία της σύγκλισης, κατά την επίλυση εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο (Σχήμα 18) το οποίο δείχνει αν η σύγκλιση προχωρεί με ικανοποιητικό ρυθμό. Στην περίπτωση που η σύγκλιση δεν ικανοποιείται, ο χρήστης μπορεί να σταματήσει την εκτέλεση και μάλιστα μπορεί να ερμηνεύσει την αδυναμία σύγκλισης, π.χ. με θεώρηση γενικής αστοχίας.

Σχήμα 18. Παράθυρο ελέγχου της σύγκλισης

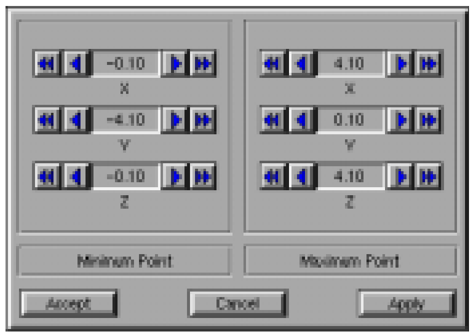
4.6. Γραφική απεικόνιση - Παρουσίαση αποτελεσμάτων

Η γραφική απεικόνιση που διαθέτει το πρόγραμμα χρησιμεύει και στην κατάστρωση του προβλήματος αλλά και στην καλύτερη αξιοποίηση των αποτελεσμάτων.

Για την κατάστρωση χρησιμοποιούνται κυρίως τα «συρμάτινα» γραφικά. Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει εκτός από την απεικόνιση των στοιχείων με γραμμές, την απεικόνιση των κόμβων, σχετικών αριθμήσεων, την απεικόνιση των φορτίων και των δεσμεύσεων και τέλος υπάρχει η δυνατότητα να απεικονιστούν στους κόμβους βελάκια παραμορφώσεων. Για τις επιλογές του χρήστη χρησιμοποιείται το παρακάτω παράθυρο:

Σχήμα 19. Παράθυρο επιλογών για την παρουσίαση των στοιχείων με «συρμάτινα» γραφικά

Με το παρακάτω παράθυρο, ο χρήστης μπορεί να επιλέξει μια περιοχή του χώρου για να γίνεται η απεικόνιση κάνοντας έτσι εύκολα τομές σε οποιαδήποτε μορφή απεικόνισης.



Σχήμα 20. Παράθυρο ορισμού των ορίων σχεδίασης

Υπάρχει ακόμα η δυνατότητα να γίνει απεικόνιση του προβλήματος με σκιασμένα πολύγωνα ώστε ο χρήστης να μπορεί να κατανοήσει ογκομετρικά το πρόβλημα. Υπάρχουν διάφορες παράμετροι για αυτή την απεικόνιση όπως χρώμα αντικειμένου, χρώμα φωτεινής πηγής, ανακλαστικότητα, κ.α.

Τα αποτελέσματα από την επίλυση μπορούν να παρουσιαστούν με δύο βασικούς τρόπους:

- Με απεικόνιση των τιμών πάνω στα πολύγωνα των στοιχείων με διάφορους τρόπους όπως χρωματικές κλίμακες, ισαριθμητικές καμπύλες, παραμόρφωση της γεωμετρίας με αυξημένη κλίμακα παραμορφώσεων

- Με την βοήθεια τομών και με διαγράμματα τάσεων και παραμορφώσεων κατά μήκος άξονα που ορίζει ο χρήστης με γωνία διεύθυνσης και αρχικό σημείο.

Στην πρώτη περίπτωση ο χρήστης πρέπει να ζητήσει αρχικά κάποιο μέγεθος για να απεικονιστεί. Για να βοηθηθεί ο χρήστης χρησιμοποιεί το παρακάτω παράθυρο:

Σχήμα 21. Παράθυρο επιλογών για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Στο παραπάνω παράθυρο, βλέπουμε αρχικά μια λίστα με τα μεγέθη που μπορούν να απεικονιστούν. Υπάρχουν όλες οι ορθές τάσεις, κύριες τάσεις, τάση von Mises [10][11], προσημασμένη τάση Von Mises, πλαστικοποίηση και παραμορφώσεις. Επίσης για κάποια μεγέθη μπορούν να απεικονιστούν οι μεταβολές από κάποιο βήμα ή οι τιμές που έχουν προέλθει από όλη την ιστορία του προβλήματος.

Οι επιλογές που έχει ακόμα ο χρήστης είναι:

- Επιλογή των χρωμάτων για την ελάχιστη, την ενδιάμεση και την μέγιστη τιμή.

- Επιλογή της πυκνότητας των πολυγώνων που απεικονίζουν τα στοιχεία

- Επιλογή απεικόνισης ισαριθμηκών καμπύλων και πλήθος.

- Επιλογή σκίασης των πολυγώνων με πηγή φωτός στην θέση της κάμερας, ώστε να φαίνεται καλύτερα ο όγκος των στοιχείων.

- Επιλογή καλύτερης πύκνωσης των πολυγώνων

- Επιλογή παρουσίασης υπομνήματος

Μία ακόμα δυνατότητα που έχει η απεικόνιση με πολύγωνα είναι η απεικόνιση της παραμορφωμένης γεωμετρίας με τη βοήθεια κάποιας κλίμακας. Έτσι, τα στερεά απεικονίζονται υπερπαραμορφωμένα και ο χρήστης αντιλαμβάνεται καλύτερα την παραμόρφωση του φορέα. Αυτή η δυνατότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με κάθε είδος απεικόνισης του προγράμματος, όπως την απεικόνιση τάσεων, και έτσι ο χρήστης μπορεί να έχει ταυτόχρονη εποπτεία παραμορφώσεων και τάσεων.

Τέλος, όπως αναφέραμε ο χρήστης μπορεί να ορίσει ένα άξονα πάνω στον οποίο μπορεί να γίνει δειγματοληψία τιμών και έτσι να σχεδιαστούν γραφήματα απόστασης/τιμών. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το παρακάτω παράθυρο:

Σχήμα 22. Παράθυρο επιλογών για την σχεδίαση γραφημάτων

Ο χρήστης ορίζει τον άξονα με κάποια διεύθυνση στο χώρο και αρχικό σημείο. Εισάγει το μήκος του άξονα και τις ισοαποστάσεις που θα γίνεται η δειγματοληψία. Σε περιοχές μετάβασης από κενό σε υλικό γίνεται αυτόματη τοποθέτηση σημείου δειγματοληψίας. Ο χρήστης μπορεί να εμφανίσει σε παράθυρο τις τιμές σε γράφημα, ή μπορεί να ζητήσει έξοδο σε αρχείο για επεξεργασία από άλλο πρόγραμμα.

Επειδή τα μεγέθη που απεικονίζονται είναι εν γένει ασυνεχή, όπως οι τάσεις, για να έχουμε ένα εξομαλυμένο πεδίο χρησιμοποιούμε τον σύμμορφο μετασχηματισμό του πεδίου [2]. Ο μετασχηματισμός αυτός μοιάζει πολύ με την επίλυση των πεπερασμένων στοιχείων, σχηματίζεται ένας πίνακας δυσκαμψίας nxn και επιλύεται το πεδίο για τα σημεία των κόμβων. Το πεδίο που προκύπτει από το μετασχηματισμό είναι ομαλό.

Τα γραφικά παραδείγματα που θα παρουσιαζόντουσαν στις πιο πάνω παραγράφους θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο σε ολοκληρωμένα παραδείγματα επίλυσης.

5. ΛΥΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

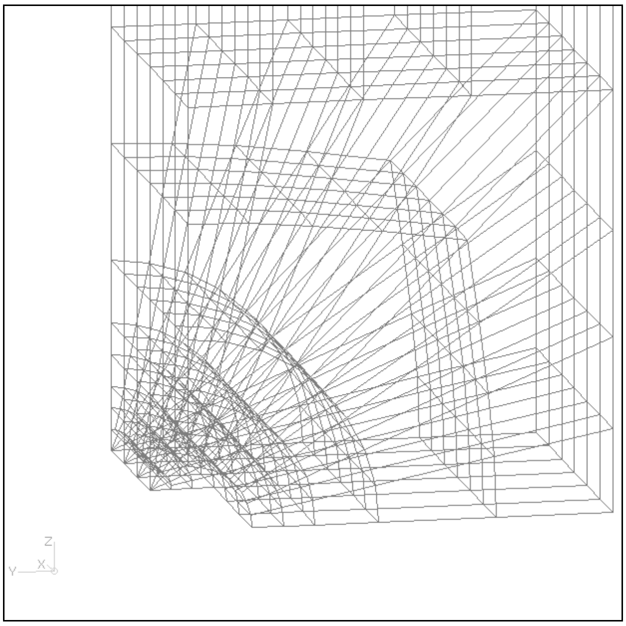
Λόγω περιορισμένου χώρου παρουσιάζουμε μόνο ένα επιλυμένο πρόβλημα. Για περισσότερα επιλυμένα παραδείγματα ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

http://www.survey.ntua.gr/~mechlab/xfem/

Το επιλυμένο πρόβλημα που επιλέχθηκε να παρουσιαστεί είναι η κατανομή των τάσεων σε μια μη διαμπερή κυκλική οπή σε άπειρο χώρο που φορτίζεται από ομοιόμορφο φορτίο. Με αυτό το πρόβλημα μπορούμε να εξομοιώσουμε την κατανομή τάσεων γύρω από το μέτωπο διάνοιξης κυκλικής σήραγγας.

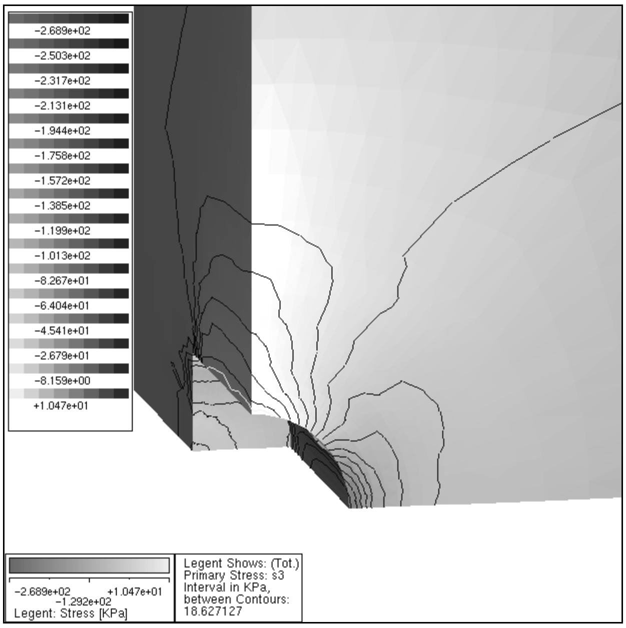
Επειδή το πρόβλημα είναι συμμετρικό για την δεδομένη γεωμετρία., φορτίο και για το επίπεδο γραμμικής ανάλυσης επιλύθηκε το 1/4 του προβλήματος. Για την κατάστρωση χρησιμοποιήθηκαν 324 στοιχεία τα οποία συναρμολογήθηκαν σε 1308 κόμβους (3924 βαθμοί ελευθερίας). Τα στοιχεία ήταν διαφόρων τύπων (πρώτου και δευτέρου βαθμού καθώς και στοιχεία μετάβασης). Ακόμα 427 βαθμοί ελευθερίας είναι δεσμευμένοι για να εξομοιώσουν τον ημίχωρο.

Στο κατακόρυφο τμήμα που αρχίζει η οπή δεν δεσμεύονται οι βαθμοί ελευθερίας «x» ώστε να έχουμε ουσιαστικά την είσοδο της σήραγγας. Στο Σχήμα 23 βλέπουμε το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων.



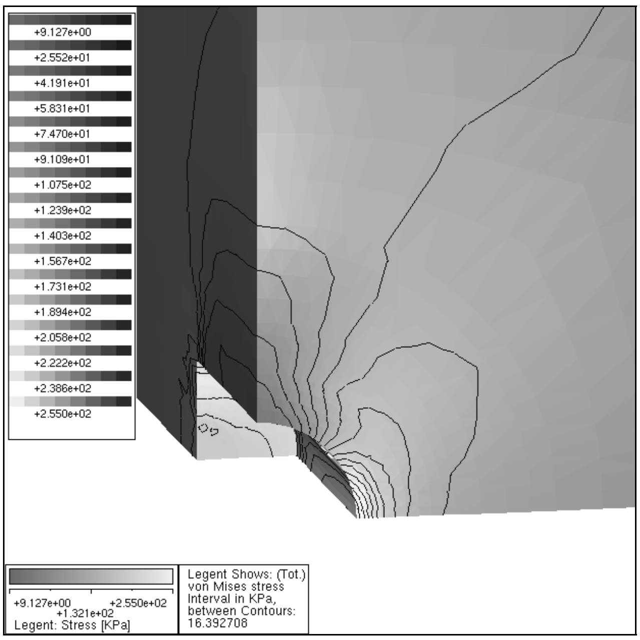
Σχήμα 23. Μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων μη διαμπερούς οπής

Το παραπάνω μοντέλο επιλύθηκε με δύο ανακυκλώσεις και τα αποτελέσματα αποθηκεύθηκαν για περαιτέρω χρήση (παρουσίαση και εξαγωγή συμπερασμάτων). Στο Σχήμα 24 καθώς και στο Σχήμα 25 βλέπουμε την παρουσίαση των αποτελεσμάτων με την βοήθεια ισοτασικών καμπύλων.



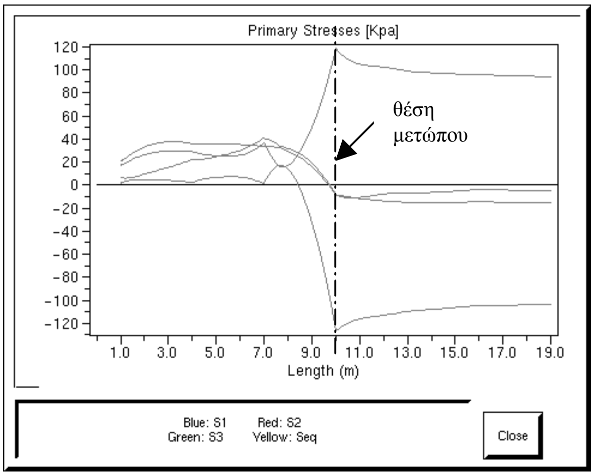
Σχήμα 24. Παρουσίαση αποτελεσμάτων με γραφικά. Ισοτασικές καμπύλες κύριας τάσης σ_3

Από το τοίχωμα του πρανούς έως και μια απόσταση 0.5 D από το μέτωπο βλέπουμε ότι η κατανομή των τάσεων δεν επηρεάζεται από το μέτωπο και ακολουθεί την κατανομή των εξισώσεων του Kirsch [15]. Κοντά στο μέτωπο η κατανομή αλλάζει προς ευνοϊκότερη κατανομή και η διατάραξη των τάσεων χάνεται σε απόσταση 0.25 D (περίπου) μετά το μέτωπο όπου η κατανομή των τάσεων γίνεται ομοιόμορφη.



Σχήμα 25. Ισοτασικές καμπύλες $\sigma_{ισοδύναμης}$ (τάση Von Mises)

Στο Σχήμα 26 βλέπουμε την κατανομή των (κύριων) τάσεων με την μορφή γραφήματος επί του άξονα που βρίσκεται στην οροφή της οπής. Στο γράφημα μπορούμε να παρατηρήσουμε την αλλαγή των τάσεων στο μέτωπο καθώς και την εμφάνιση της σ_1 μετά το σημείο του μετώπου, η οποία μέχρι αυτό το σημείο παραμένει μηδενική.



Σχήμα 26. Γραφήματα κυρίων τάσεων και ισοδύναμης τάσης επί άξονα που βρίσκεται στην οροφή της οπής

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι από τις ισχυρότερες μεθόδους της αριθμητικής ανάλυσης. Η διερεύνηση πάνω στα θεωρητικά – μαθηματικά θέματα της μεθόδου βρίσκεται σε αρκετά προχωρημένο στάδιο. Στα προγραμματιστικά θέματα της μεθόδου υπάρχει κάποια υστέρηση στην πρόοδο και μόλις τελευταία έχουν γραφτεί κώδικες σε αντικειμενοστρεφή περιβάλλοντα.

Με το πρόγραμμα που αναπτύχθηκε η πρόθεση δεν ήταν να γραφτεί κάποιος κώδικας ανταγωνιστικός σε εμπορικό επίπεδο και σε επίπεδο τεχνολογίας αιχμής αλλά κυρίως να γίνει κάποια διερεύνηση στην ανάδραση του περιβάλλοντος εισαγωγής δεδομένων – επίλυσης και παρουσίασης. Ακόμα διερευνήθηκε ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να προσθέτουμε νέους καταστατικούς νόμους μη γραμμικής συμπεριφοράς. Το αποτέλεσμα είναι αρκετά ικανοποιητικό και υπάρχουν ακόμα περιθώρια βελτίωσης στους τομείς της φιλικότητας προς τον χρήστη.

Το υπολογιστικό κομμάτι του προγράμματος δείχνει να δουλεύει σωστά και πέρασε με επιτυχία ελέγχους αξιοπιστίας [8]. Το πρόγραμμα είναι αρκετά ανοικτό σε προγραμματιστικό επίπεδο ώστε να μπορούν να προστεθούν και άλλοι νόμοι μη γραμμικής συμπεριφοράς καθώς και άλλες ρουτίνες για την σύγκλιση. Ακόμα είναι αρκετά ανοικτό το κομμάτι για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων αν και βρίσκεται ήδη σε απόλυτα ικανοποιητικό επίπεδο.

Το επόμενο στάδιο γενικά θα είναι η χρήση του προγράμματος για την επίλυση διαφόρων προβλημάτων κυρίως ερευνητικής φύσεως. Προβλέπεται ότι η ανάπτυξη του προγράμματος θα σταματήσει εφόσον έχει πετύχει τον στόχο της, απλά μπορεί να εισαχθούν νέα κριτήρια αστοχίας κ.α.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Κοζάνης Σ., «Ανάπτυξη προγράμματος πεπερασμένων στοιχείων με εφαρμογές σε τρισδιάστατα προβλήματα μη γραμμικής συμπεριφοράς», διπλωματική εργασία, **Τ.Α.Τ.Μ. – Ε.Μ.Π.** Ιούλιος 1996

2. Τσαμασφύρος Γ.Ι., Θεοτοκόγλου Ε.Ε., Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, **Συμμετρία** 1994

3. Beer & Watson, Introduction to Finite and Boundary Element Methodes for Engineers, **Juhn Wiley & Sons**, 1992

4. Desai & Christian, Numerical Methods in Geotechnical Engineering, 1977

5. Fagan M. J., Finite Element Analysis Theory and Practice, **Longman Scientific & Technical**, 1992

6. Owen & Hinton, Finite Elements in Plasticity, **Pineridge Press Ltd**, 1980

7. Reddy J.N., Finite Element Method, **McGrawHill**, 1993

8. Richard H. Macneal, Finite Elements: Their design and performance

9. Smith, Programming the Finite Element Method with applications to geomechanics

10. Shames I.H. & Cozzarelli F.A., Elastic and Inelastic Stress Analysis, **Prentice-Hall**, 1992

11. Μαρκέτος Ε.Γ., Τεχνική Μηχανική ΙΙ Αντοχή των Υλικών, **Συμμετρία**, 1992

12. Μυλωνάς Κ.Π., Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων, **Ε.Μ.Π.**, 1992

13. Chapra S.C. & Canale R.P., Numerical Methodes for Engineers, **McGraw-Hill**, 1988

14. Alan Watt, 3D Computer Graphics, **Addison**, 1993

15. E.Hoek & E.T. Brown, Underground Excavations in Rock, **Institution of Mining and Metallurgy**, 1980

Μ. Γ. Σακελλαρίου,
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π., Εργαστήριο Δομικής Μηχανικής και Στοιχείων τεχνικών έργων, Τ.Α.Τ.Μ., Ε.Μ.Π., Αθήνα 15780
Σ. Κοζάνης,
Α.Τ.Μ. Ε.Μ.Π., Υ.Δ. Ε.Μ.Π., Εργαστήριο Δομικής Μηχανικής και Στοιχείων τεχνικών έργων, Τ.Α.Τ.Μ., Ε.Μ.Π., Αθήνα 15780